MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 5

1. Hallar la descomposición de valores singulares de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, y sean P, Q matrices ortogonales de tamaño $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente. Mostrar que A y PAQ tienen los mismos valores singulares.

3. Hallar la matriz de Gram de las siguientes formas bilineales (: $\mathbf{F}^k \times \mathbf{F}^k \to \mathbf{F}^k$, $k = 2$ en (a) y (b) y $k = 3$ en (c).
   (a) $((a, b), (c, d)) = ac + bd$
   (b) $((a, b), (c, d)) = ad - 2bc + bd$
   (c) $((a, b, c), (d, e, f)) = ad - be + af + ce$

4. Hallar las matrices las formas bilineales de la pregunta anterior con respeto a la base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ (casos (a) y (b)) y con respeto a la base $\{((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ (caso (c)).

5. Sea $(,) : V \times V \to F$ una forma bilineal donde V es un F-espacio vectorial de dimensión finita. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) Si $(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{0}$ para todo $\vec{v} \in V$, entonces $\vec{w} = \vec{0}$.
   (b) Si $(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{0}$ para todo $\vec{w} \in V$, entonces $\vec{v} = \vec{0}$.
   (c) El rango de $(,)$, es decir el rango de la matriz de Gram de $(,)$ en cualquier base, es $n = \dim V$.

   Una forma bilineal se llama *no-degenerada* si estas condiciones se cumplen.

6. Probar que un producto interno en $\mathbf{R}^n$ es no-degenerada. Dar un ejemplo de una forma bilineal no-degenerada sobre $\mathbf{R}^n$ para el cual existen vectores $\vec{v} \neq \vec{0}$ tales que $(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

7. Con la notación de la pregunta 5, Sea W una forma bilineal no-degenerada y sea $W^\perp = \{\vec{v} \in V : (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W\}$. Mostrar que $W^\perp$ es un subespacio de V. Dar un ejemplo para el cual $W \cap W^\perp \neq \vec{0}$, asi que, en este caso, V no es la suma directa de W y $W^\perp$, (en contraste con el caso especial de un producto interno en $\mathbf{R}^n$). Probar, sin embargo, que $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

8. Diagonalizar, y asi deducir la firma, de las siguientes formas cuadráticas: (i) $xy \in \mathbf{R}[x, y]$; (ii) $xy \in \mathbf{R}[x, y, z]$; (iii) $xy+xz \in \mathbf{R}[x, y, z]$ (iv) $xz-yw \in \mathbf{R}[x, y, z, w]$; (v)$x^2-xy+y^2+xz-z^2 \in \mathbf{R}[x, y, z]$. Hallar también la matriz simétrica y la forma bilineal asociada a cada una de las formas cuadráticas.

9. Sea $Q : V \to F$ una forma cuadrática y sea $W \subseteq V$ un subespacio. Probar que $Q|W$ es una forma cuadrática. Cierto o falso: Si Q es no-degenerado entonces $Q|W$ es no-degenerado?

10. Sea $P \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ no-singular y positiva-definida. Probar que $\det P$ y $\operatorname{Tr} P$ son positivos.

11. Hallar la firma de la forma cuadrática definida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.